



Concours Mathématiques et Physique
Épreuve de Mathématiques I

Session 2025	Date : 27/05/2025	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

L'usage de la calculatrice et tout autre dispositif électronique est interdit.

Donnez vos réponses aux questions dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. Si vous avez besoin de plus d'espace pour une réponse, vous pouvez utiliser l'espace supplémentaire disponible à la fin des feuilles de réponses en précisant le numéro de la question et en indiquant dans l'espace réponse que la réponse se poursuit sur l'espace supplémentaire.

Exercice :

On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note I_X l'ensemble des réels t tels que l'espérance $E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} P(X = k)$, de la variable aléatoire e^{tX} , soit finie. Pour $t \in I_X$, on pose

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}).$$

- Q.1** ▷ Dans cette question, on considère une variable aléatoire de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in [0, 1]$. Justifier que $I_{\mathcal{B}(p)} = \mathbb{R}$ et calculer $\mathcal{L}_{\mathcal{B}(p)}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Q.2** ▷ Dans cette question, on considère une variable aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que $I_{\mathcal{P}(\lambda)} = \mathbb{R}$ et calculer $\mathcal{L}_{\mathcal{P}(\lambda)}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Q.3** ▷ Montrer que $0 \in I_X$ et que si $t_0 \in I_X$, alors $] -\infty, t_0] \subset I_X$, puis en déduire que I_X est un intervalle non minoré de $\mathbb{R}$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $I_X = \mathbb{R}$.

- Q.4** ▷ Montrer que pour tout $a \geq 0$, $P(X \geq a) \leq \inf_{t > 0} e^{-at} \mathcal{L}_X(t)$.
- Q.5** ▷ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable X^n est d'espérance finie.
- Q.6** ▷ Montrer que l'application $\mathcal{L}_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}_X(t)$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$

On considère une variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $I_Y = \mathbb{R}$ et pour tout réel t , on a : $\mathcal{L}_Y(t) = \mathcal{L}_X(t)$.

Q.7 ▷ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^n) = E(Y^n)$.

Q.8 ▷ Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les deux séries $\sum_{k \geq 0} e^{ikt} P(X = k)$ et $\sum_{k \geq 0} e^{ikt} P(Y = k)$ convergent et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(Y = k).$$

Q.9 ▷ Prouver que l'application $\psi : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(X = k)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q.10 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(t) dt$.

Q.11 ▷ En déduire que X et Y suivent la même loi.

Q.12 ▷ Dans cette question, on suppose de plus que les deux variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $I_{X+Y} = \mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t) \mathcal{L}_Y(t).$$

Q.13 ▷ Dans cette question, on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 > 0$, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_2 > 0$ et que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

Problème :

Le but des parties I. et II. de ce problème est de montrer que pour une application continue quelconque $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$, on a l'équivalence suivante :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = 0, \\ \text{Pour tout } a > 0, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ est convergente,} \\ \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ existe dans } \mathbb{C}. \end{cases}$$

De plus, dans ce cas, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

La partie III. du problème est indépendante des autres parties.

Partie I.

Dans toute cette partie, on considère une application continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

On note $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Q.14 ▷ Montrer que l'application F admet une limite finie en $+\infty$ et qu'elle est bornée sur $[0, +\infty[$.

Q.15 ▷ En déduire que pour tout $a > 0$, l'application $t \mapsto e^{-at}F(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Q.16 ▷ Soit $a > 0$. Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t) dt$ est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t) dt = a \int_0^{+\infty} e^{-at}F(t) dt.$$

On considère l'application $\mathcal{L} : a \in [0, +\infty[\mapsto \mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at}f(t) dt$.

Q.17 ▷ Montrer que $\mathcal{L}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a > 0$,

$$\mathcal{L}^{(n)}(a) = a \int_0^{+\infty} (-t)^n e^{-at}F(t) dt + n \int_0^{+\infty} (-t)^{n-1} e^{-at}F(t) dt.$$

Q.18 ▷ Justifier que pour tout $a > 0$,

$$\mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} e^{-u}F\left(\frac{u}{a}\right) du,$$

puis en déduire que $\mathcal{L}$ admet une limite finie à droite de 0 et que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(a) = I.$$

Q.19 ▷ Prouver que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(a) = 0$.

Pour $x \geq 0$, on pose $G(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$.

Q.20 ▷ Justifier que l'application $G : x \mapsto G(x)$ est bien définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

Q.21 ▷ En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Q.22 ▷ Soit $x > 0$. Prouver que $\frac{1}{x} \int_0^x tf(t) dt = -G(x) + \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt$.

Q.23 ▷ En déduire que

$$\int_0^x tf(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x).$$

On considère dans la suite, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Q.24 ▷ Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Pour $a \geq 0$, on pose $\mathcal{L}_\varphi(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at}\varphi(t) dt$.

Q.25 ▷ Montrer que $\mathcal{L}_\varphi$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $a > 0$, $\mathcal{L}'_\varphi(a) = -\frac{1}{1+a^2}$.

Q.26 ▷ En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Partie II.

Dans toute cette partie, on considère une application continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = 0, \\ \text{Pour tout } a > 0, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ est convergente,} \\ \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ existe dans } \mathbb{C}. \end{cases}$$

On définit l'application

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{2} f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Q.27 ▷ Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$.

Q.28 ▷ Justifier que $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt$ convergent, pour tout $a > 0$.

Q.29 ▷ Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x e^{-at} f(t) dt = x g(x) e^{-ax} + \int_0^x e^{-at} g(t) dt + a \int_0^x t e^{-at} g(t) dt,$$

$$\text{et en déduire que } \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt + a \int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt.$$

Q.30 ▷ Prouver que $\lim_{a \rightarrow 0^+} a \int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt = 0$ et en déduire que $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$ existe et vaut

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt.$$

Q.31 ▷ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t |g(t)| dt = 0$.

Q.32 ▷ Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t \leq e^t$.

Q.33 ▷ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x g(t) dt - \int_0^x e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \right) = 0$.

Q.34 ▷ Justifier la convergence des intégrales $\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} dt$, pour tout $x > 0$ et montrer que

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} dt\right).$$

Q.35 ▷ En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt = 0$.

Q.36 ▷ Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$.

Q.37 ▷ Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_0^x f(t) dt = xg(x) + \int_0^x g(t) dt$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt.$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \phi(t) = \begin{cases} \frac{t}{e^t - 1} - \sin t & \text{si } t > 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Q.38 ▷ Justifier que ϕ est continue sur $[0, +\infty[$.

Q.39 ▷ Soit $a > 0$. Prouver que $\int_0^{+\infty} e^{-at} \phi(t) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \phi(t) dt = -\frac{1}{1+a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2}.$$

(On pourra utiliser un développement en série entière).

Q.40 ▷ Montrer que $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} \phi(t) dt$ existe dans $\mathbb{R}$, mais que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt$ diverge.

Partie III.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

On rappelle que l'application $\|\cdot\|_\infty : f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ est une norme sur $\mathcal{C}$.

Q.41 ▷ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in B = \{h \in \mathcal{C} ; \|h\|_\infty \leq \frac{1}{4}\}$.

Q.42 ▷ Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Q.43 ▷ Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet aucune sous-suite convergente dans $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$ et en déduire que B n'est pas un compact de $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$.

Q.44 ▷ Soient $f \in \mathcal{C}$ et $x > 0$. Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx} f(e^{-nx})$ converge.

$$\text{On note } L(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} f(e^{-nx}).$$

Q.45 ▷ Montrer que l'ensemble $E = \{f \in \mathcal{C}, \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$.

Pour $f \in E$, on pose

$$T(f) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)(x).$$

Q.46 ▷ Prouver que l'application $T : f \in E \mapsto T(f)$ est une forme linéaire continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

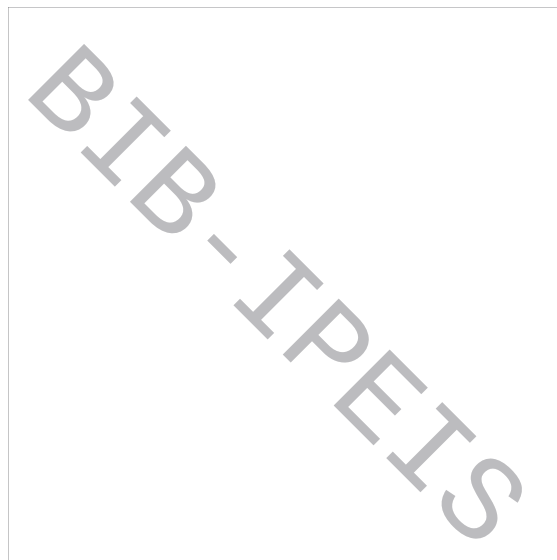
Q.47 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $m_k : t \in [0, 1] \mapsto t^k$ appartient à E et que

$$T(m_k) = \int_0^1 m_k(t) dt.$$

Q.48 ▷ En déduire que $E = \mathcal{C}$ et que pour tout $f \in \mathcal{C}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} f(e^{-nx}) = \int_0^1 f(t) dt.$$

★ Fin de l'épreuve ★





Concours Mathématiques et Physique
Corrigé de l'Épreuve de Mathématiques I

Session 2025	Date : 27/05/2025	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

Exercice :

On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note I_X l'ensemble des réels t tels que l'espérance $E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} P(X = k)$, de la variable aléatoire e^{tX} , soit finie. Pour $t \in I_X$, on pose

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}).$$

Q.1 ▷ Dans cette question, on considère une variable aléatoire de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in [0, 1]$. Justifier que $I_{\mathcal{B}(p)} = \mathbb{R}$ et calculer $\mathcal{L}_{\mathcal{B}(p)}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(e^{t\mathcal{B}(p)})$ est finie ($\mathcal{B}(p)$ prend un nombre fini de valeurs), donc $I_{\mathcal{B}(p)} = \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}(p)}(t) = E(e^{t\mathcal{B}(p)}) = P(\mathcal{B}(p) = 0) + e^t P(\mathcal{B}(p) = 1) = (1 - p) + e^t p = p e^t + 1 - p.$$

Q.2 ▷ Dans cette question, on considère une variable aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que $I_{\mathcal{P}(\lambda)} = \mathbb{R}$ et calculer $\mathcal{L}_{\mathcal{P}(\lambda)}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{k \geq 0} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge et sa somme vaut $e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$, donc $I_{\mathcal{P}(\lambda)} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{P}(\lambda)}(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q.3 ▷ Montrer que $0 \in I_X$ et que si $t_0 \in I_X$, alors $] -\infty, t_0] \subset I_X$, puis en déduire que I_X est un intervalle non minoré de $\mathbb{R}$.

Comme $E(e^{0X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$, alors $0 \in I_X$. Soient $t_0 \in I_X$ et $t \in \mathbb{R}$; $t \leq t_0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq e^{tk} P(X = k) \leq e^{t_0 k} P(X = k)$. Comme la série $\sum_{k \geq 0} e^{t_0 k} P(X = k)$ converge, alors la série $\sum_{k \geq 0} e^{tk} P(X = k)$ converge aussi. D'où $] -\infty, t_0] \subset I_X$. En particulier, puisque $0 \in I_X$, $] -\infty, 0] \subset I_X$, donc I_X n'est pas minoré. Soient x et y deux éléments de I_X tels que $x < y$ et $z \in]x, y[$. D'après ce qui précède $] -\infty, y] \subset I_X$, donc $z \in I_X$. D'où I_X est un intervalle de $\mathbb{R}$. Finalement, I_X est un intervalle non minoré de $\mathbb{R}$ contenant 0.

On suppose dans la suite de l'exercice que $I_X = \mathbb{R}$.

Q.4 ▷ Montrer que pour tout $a \geq 0$, $P(X \geq a) \leq \inf_{t>0} e^{-at} \mathcal{L}_X(t)$.

Soient $a \geq 0$ et $t > 0$. Comme la variable aléatoire discrète e^{tX} est d'espérance finie, alors d'après l'inégalité de Markov, $P(X \geq a) = P(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}} = e^{-at} \mathcal{L}_X(t)$. Or ceci est vrai pour tout $t > 0$, donc $P(X \geq a) \leq \inf_{t>0} e^{-at} \mathcal{L}_X(t)$.

Q.5 ▷ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable X^n est d'espérance finie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{k^n}{n!} \leq e^k$, donc $0 \leq X^n \leq n! e^X$. Comme la variable aléatoire e^X est d'espérance finie, alors la variable X^n est aussi d'espérance finie.

Q.6 ▷ Montrer que l'application $\mathcal{L}_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}_X(t)$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Puisque $|t| \in I_X = \mathbb{R}$, la série $\sum_{k \geq 0} e^{|t|k} P(X = k)$ converge. Or $e^{|t|k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|t|^n k^n}{n!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc la famille $\left(\frac{t^n k^n}{n!} P(X = k) \right)_{k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}}$ est sommable et on a :

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n k^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} k^n P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$

On considère une variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $I_Y = \mathbb{R}$ et pour tout réel t , on a : $\mathcal{L}_Y(t) = \mathcal{L}_X(t)$.

Q.7 ▷ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^n) = E(Y^n)$.

Pour tout réel t , $\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{L}_Y(t)$. D'après la question précédente, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(Y^n)}{n!} t^n$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On obtient (en considérant les dérivées $n^{\text{ème}}$ en 0) $E(X^n) = E(Y^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q.8 ▷ Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les deux séries $\sum_{k \geq 0} e^{ikt} P(X = k)$ et $\sum_{k \geq 0} e^{ikt} P(Y = k)$ convergent et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(Y = k).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|e^{ikt} P(X = k)| = P(X = k)$. Or $\sum_{k \geq 0} P(X = k)$ converge, alors $\sum_{k \geq 0} e^{ikt} P(X = k)$ converge absolument, donc elle converge. De même pour $\sum_{k \geq 0} e^{ikt} P(Y = k)$. La famille $\sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{i^n t^n k^n}{n!} P(X = k)$ est sommable (En fait $\sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{|i^n t^n k^n|}{n!} P(X = k)$ est sommable de somme $E(e^{|t|X})$). De plus, sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} E(X^n) t^n$. De même pour la variable Y . Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^n) = E(Y^n)$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(Y = k)$.

Q.9 ▷ Prouver que l'application $\psi : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(X = k)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} e^{ikt} P(X = k)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto e^{ikt} P(X = k)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc l'application $\psi : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(X = k)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q.10 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(t) dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme l'application $t \mapsto e^{-int} e^{ikt} P(X = k)$ est continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et la série $\sum_{k \geq 0} e^{-int} e^{ikt} P(X = k)$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0, 2\pi]$, alors $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{ikt} dt$.

Or $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{ikt} dt = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$, donc $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(t) dt = P(X = n)$.

Q.11 ▷ En déduire que X et Y suivent la même loi.

De même on montre comme dans **Q.10**, que $P(Y = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt} P(Y = k) dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après **Q.10** et **Q.8**, $P(X = n) = P(Y = n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc X et Y suivent la même loi.

Q.12 ▷ Dans cette question, on suppose de plus que les deux variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $I_{X+Y} = \mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t) \mathcal{L}_Y(t).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les variables aléatoires e^{tX} et e^{tY} sont indépendantes d'espérances finies, donc la variable $e^{t(X+Y)} = e^{tX} e^{tY}$ est d'espérance finie et $E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}) E(e^{tY})$. Ce qui implique que $I_{X+Y} = \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t) \mathcal{L}_Y(t)$.

Q.13 ▷ Dans cette question, on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 > 0$, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_2 > 0$ et que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 > 0$, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_2 > 0$ et que X et Y sont indépendantes. D'après **Q.12** et **Q.2**, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t) \mathcal{L}_Y(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$. Donc d'après **Q.2** et **Q.11**, $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Problème :

Le but des parties I. et II. de ce problème est de montrer que pour une application continue quelconque $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$, on a l'équivalence suivante :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = 0, \\ \text{Pour tout } a > 0, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ est convergente,} \\ \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ existe dans } \mathbb{C}. \end{cases}$$

De plus, dans ce cas, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

La partie III. du problème est indépendante des autres parties.

Partie I.

Dans toute cette partie, on considère une application continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

On note $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Q.14 ▷ Montrer que l'application F admet une limite finie en $+\infty$ et qu'elle est bornée sur $[0, +\infty[$.

Comme $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = I$. De plus, F est continue sur $[0, +\infty[$ (En effet, F est la primitive de f sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0), donc F est bornée sur $[0, +\infty[$.

Q.15 ▷ En déduire que pour tout $a > 0$, l'application $t \mapsto e^{-at} F(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

F est bornée sur $[0, +\infty[$, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|F(t)| \leq M$. Soit $a > 0$. L'application $t \mapsto e^{-at} F(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie pour tout $t \geq 0$, $|e^{-at} F(t)| \leq M e^{-at}$. Comme l'application $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors l'application $t \mapsto e^{-at} F(t)$ est aussi intégrable sur $[0, +\infty[$.

Q.16 ▷ Soit $a > 0$. Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = a \int_0^{+\infty} e^{-at} F(t) dt.$$

Soient $a > 0$ et $x > 0$. On effectue une intégration par parties, on obtient $\int_0^x e^{-at} f(t) dt = [e^{-at} F(t)]_0^x + a \int_0^x e^{-at} F(t) dt$. Comme $F(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} F(x) = 0$ et l'application $t \mapsto e^{-at} F(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = a \int_0^{+\infty} e^{-at} F(t) dt$.

On considère l'application $\mathcal{L} : a \in [0, +\infty[\mapsto \mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$.

Q.17 ▷ Montrer que $\mathcal{L}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a > 0$,

$$\mathcal{L}^{(n)}(a) = a \int_0^{+\infty} (-t)^n e^{-at} F(t) dt + n \int_0^{+\infty} (-t)^{n-1} e^{-at} F(t) dt.$$

Montrer que l'application $\mathcal{L}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ revient à montrer d'après **Q.16**, que l'application $a \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-at} F(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Pour cela nous allons vérifier les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale. Pour tout $t \geq 0$, l'application $a \mapsto e^{-at} F(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^n h_t}{\partial a^n}(a) = (-t)^n e^{-at} F(t)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a > 0$, l'application $t \mapsto (-t)^n e^{-at} F(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (F étant bornée sur $[0, +\infty[$ et l'application $t \mapsto t^n e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$). Soit $M > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|F(t)| \leq M$. Soit $\alpha > 0$. Alors pour tout $t \geq 0$ et tout $a \geq \alpha$, $|(-t)^n e^{-at} F(t)| \leq M t^n e^{-\alpha t}$ et l'application $t \mapsto M t^n e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par suite, l'application $a \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-at} F(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Ce qui implique que l'application $\mathcal{L}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a > 0$,

$$\mathcal{L}^{(n)}(a) = a \int_0^{+\infty} (-t)^n e^{-at} F(t) dt + n \int_0^{+\infty} (-t)^{n-1} e^{-at} F(t) dt \quad (\text{d'après Q.16}).$$

Q.18 ▷ Justifier que pour tout $a > 0$,

$$\mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right) du,$$

puis en déduire que $\mathcal{L}$ admet une limite finie à droite de 0 et que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(a) = I.$$

Soit $a > 0$. $\mathcal{L}(a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} F(t) dt$. On effectue le changement de variables $u = at$, on obtient $\mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right) du$. On va appliquer le théorème de la limite sous le signe intégrale. Pour tout $a > 0$, l'application $u \mapsto e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = I$ et $F(0) = 0$, alors $\lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right) = \begin{cases} I e^{-u} & \text{si } u > 0, \\ 0 & \text{si } u = 0. \end{cases}$

Soit $M > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|F(t)| \leq M$. Pour tout $u \geq 0$ et tout $a > 0$, $\left|e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right)\right| \leq M e^{-u}$ et l'application $u \mapsto M e^{-u}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par suite, $\mathcal{L}$ admet une limite finie à droite de 0 et

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} \lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right) du = I \int_0^{+\infty} e^{-u} du = I.$$

Q.19 ▷ Prouver que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(a) = 0$.

On va utiliser le théorème de la limite sous le signe intégrale. Pour tout $a > 0$, l'application $u \mapsto e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $u \geq 0$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right) = 0$ (car $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = 0$). Pour tout $u \geq 0$ et tout $a > 0$, $\left|e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right)\right| \leq M e^{-u}$ et l'application $u \mapsto M e^{-u}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, avec $M > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|F(t)| \leq M$. Par suite, l'application $\mathcal{L}$ admet une limite finie en $+\infty$ et

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right) du = 0.$$

Pour $x \geq 0$, on pose $G(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$.

Q.20 ▷ Justifier que l'application $G : x \mapsto G(x)$ est bien définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

Comme $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente, alors $G(x)$ est bien défini, pour tout $x \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

De plus, pour tout $x \geq 0$, $G(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = I - F(x)$. Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, alors G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $G'(x) = -f(x)$, pour tout $x \geq 0$.

Q.21 ▷ En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = 0$, alors il existe $A_1 > 0$ tel que pour tout $t \geq A_1$,

$$|G(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Soit } x > A_1. \left| \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \left| \int_0^{A_1} G(t) dt \right| + \frac{1}{x} \int_{A_1}^x |G(t)| dt, \text{ donc}$$

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \left| \int_0^{A_1} G(t) dt \right| + \frac{\varepsilon x - A_1}{2x} \leq \frac{1}{x} \left| \int_0^{A_1} G(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \text{ D'autre part,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left| \int_0^{A_1} G(t) dt \right| = 0. \text{ Donc il existe } A \geq A_1 \text{ tel que pour tout } x > A,$$

$$\frac{1}{x} \left| \int_0^{A_1} G(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Par suite, pour tout } x > A, \text{ on a : } \left| \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Q.22 ▷ Soit $x > 0$. Prouver que $\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = -G(x) + \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt$.

Soit $x > 0$. On effectue une intégration par parties, on obtient

$$\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{x} [-tG(t)]_0^x + \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt = -G(x) + \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt.$$

Q.23 ▷ En déduire que

$$\int_0^x t f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x).$$

D'après **Q.20** et **Q.21**, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt = 0$, donc **Q.22** donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = 0, \text{ autrement } \int_0^x t f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x).$$

On considère dans la suite, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Q.24 ▷ Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

L'application φ étant continue sur $[0, +\infty[$, on étudie la convergence de l'intégrale au voisinage de $+\infty$. On effectue une intégration par parties, on obtient pour tout $x > 1$,
 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente donc convergente, alors $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Pour $a \geq 0$, on pose $\mathcal{L}_\varphi(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \varphi(t) dt$.

Q.25 ▷ Montrer que $\mathcal{L}_\varphi$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $a > 0$, $\mathcal{L}'_\varphi(a) = -\frac{1}{1+a^2}$.

D'après **Q.17**, l'application $\mathcal{L}_\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, en particulier elle est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $t \geq 0$, l'application $a \mapsto e^{-at} \varphi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $a > 0$, $\frac{\partial}{\partial a} e^{-at} \varphi(t) = -e^{-at} \sin t$. Pour tout $a > 0$, l'application $t \mapsto -e^{-at} \sin t$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $\alpha > 0$. Alors pour tout $t \geq 0$ et tout $a \geq \alpha$, $|-e^{-at} \sin t| \leq e^{-\alpha t}$ et l'application $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par suite, l'application $\mathcal{L}_\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $a > 0$,
 $\mathcal{L}'_\varphi(a) = -\int_0^{+\infty} e^{-at} \sin t dt = -\operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-a)t} dt \right) = -\frac{1}{a^2 + 1}$.

Q.26 ▷ En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Pour tout $a > 0$, $\mathcal{L}'_\varphi(a) = -\frac{1}{1+a^2}$, donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $a > 0$,
 $\mathcal{L}_\varphi(a) = -\arctan a + c$. D'après **Q.19**, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_\varphi(a) = 0$, alors on en déduit que $c = \frac{\pi}{2}$ et par suite
 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \mathcal{L}_\varphi(a) = \frac{\pi}{2}$. Or, d'après **Q.18**, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \mathcal{L}_\varphi(a) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
 D'où $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Partie II.

Dans toute cette partie, on considère une application continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = 0, \\ \text{Pour tout } a > 0, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ est convergente,} \\ \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ existe dans } \mathbb{C}. \end{cases}$$

On définit l'application

$$g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{2} f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Q.27 ▷ Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$.

L'application g est continue sur $]0, +\infty[$, elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car l'application f est continue sur $[0, +\infty[$. Montrons que g est continue en 0. Remarquons que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2}f(0) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(0) dt$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en 0, alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \alpha[$, $|f(t) - f(0)| \leq 2\varepsilon$. Soit $x \in]0, \alpha[$.

$$\left| \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt - \frac{1}{2} f(0) \right| = \frac{1}{x^2} \left| \int_0^x t (f(t) - f(0)) dt \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x t |f(t) - f(0)| dt \leq \varepsilon.$$

Q.28 ▷ Justifier que $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt$ convergent, pour tout $a > 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = 0$, par hypothèse, alors $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. Soit $a > 0$. Les applications $t \mapsto e^{-at} g(t)$ et $t \mapsto t e^{-at} g(t)$ sont continues sur $[0, +\infty[$. De plus, $e^{-at} g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t e^{-at} g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt$ convergent.

Q.29 ▷ Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x e^{-at} f(t) dt = x g(x) e^{-ax} + \int_0^x e^{-at} g(t) dt + a \int_0^x t e^{-at} g(t) dt,$$

et en déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt + a \int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt$.

Soient $a > 0$ et $x > 0$. On considère l'intégrale $\int_0^x e^{-at} f(t) dt$ et on effectue une intégration par parties sur $]0, x]$ en dérivant l'application $t \mapsto \frac{e^{-at}}{t}$ et en prenant $t \mapsto \int_0^t u f(u) du$ pour primitive de l'application $t \mapsto t f(t)$. Or pour tout $t > 0$, $\int_0^t u f(u) du = t^2 g(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} t g(t) e^{-at} = 0$, donc

$$\int_0^x e^{-at} f(t) dt = x g(x) e^{-ax} + \int_0^x e^{-at} g(t) dt + a \int_0^x t e^{-at} g(t) dt.$$

Par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ et en utilisant **Q.28**, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt + a \int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt.$$

Q.30 ▷ Prouver que $\lim_{a \rightarrow 0^+} a \int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt = 0$ et en déduire que $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$ existe et vaut

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} tg(t) = 0$, alors il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|tg(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $a > 0$, $\left| a \int_0^{+\infty} te^{-at} g(t) dt \right| \leq a \int_0^A t|g(t)| dt + a \int_A^{+\infty} e^{-at} |tg(t)| dt$. D'une part, on a pour tout $a > 0$, $a \int_A^{+\infty} e^{-at} |tg(t)| dt \leq a \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{\varepsilon}{2} e^{-aA} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, puisque $\lim_{a \rightarrow 0^+} a \int_0^A t|g(t)| dt = 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $a \in]0, \alpha[$, $a \int_0^A t|g(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, pour tout $a \in]0, \alpha[$, $\left| a \int_0^{+\infty} te^{-at} g(t) dt \right| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim_{a \rightarrow 0^+} a \int_0^{+\infty} te^{-at} g(t) dt = 0$. Par hypothèse, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ existe dans $\mathbb{C}$, donc d'après **Q.29**, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$ existe et vaut $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$.

Q.31 ▷ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t|g(t)| dt = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} tg(t) = 0$, alors il existe $A_1 > 0$ tel que pour tout $t \geq A_1$, $|tg(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $x > A_1$. $0 \leq \frac{1}{x} \int_0^x t|g(t)| dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{A_1} t|g(t)| dt + \frac{1}{x} \int_{A_1}^x |tg(t)| dt$, donc $\frac{1}{x} \int_0^x t|g(t)| dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{A_1} t|g(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - A_1}{x} \leq \frac{1}{x} \int_0^{A_1} t|g(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^{A_1} t|g(t)| dt = 0$. Donc il existe $A \geq A_1$ tel que pour tout $x > A$, $\frac{1}{x} \int_0^{A_1} t|g(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, pour tout $x > A$, on a : $0 \leq \frac{1}{x} \int_0^x t|g(t)| dt \leq \varepsilon$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t|g(t)| dt = 0$.

Q.32 ▷ Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t \leq e^t$.

On effectue une étude de variations sur la fonction $t \mapsto e^t - t - 1$. On obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t \leq e^t$.

Q.33 ▷ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x g(t) dt - \int_0^x e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \right) = 0$.

D'après **Q.32**, pour tout $x > 0$, $\left| \int_0^x g(t) dt - \int_0^x e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \right| = \left| \int_0^x \left(1 - e^{-\frac{t}{x}} \right) g(t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x t|g(t)| dt$. En utilisant **Q.31**, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x g(t) dt - \int_0^x e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \right) = 0$.

Q.34 ▷ Justifier la convergence des intégrales $\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} dt$, pour tout $x > 0$ et montrer que

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} dt \right).$$

Soit $x > 0$. L'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt$ converge car $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt$ converge d'après **Q.28** (pour $a = \frac{1}{x}$). D'autre part, $\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{1}{t^2} \right)$, donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} dt$ converge.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} tg(t) = 0$, alors il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|tg(t)| \leq \varepsilon$. Donc pour tout $t \geq A$, $\left| e^{-\frac{t}{x}} g(t) \right| \leq \varepsilon \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t}$. D'où pour tout $x \geq A$, $\left| \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} dt$. Par suite, $\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} dt \right)$.

Q.35 ▷ En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt = 0$.

Comme $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$, alors d'après **Q.34**, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt = 0$.

Q.36 ▷ Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$.

Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x g(t) dt$ existe et vaut $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t) dt &= \left(\int_0^x g(t) dt - \int_0^x e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \right) + \int_0^x e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \\ &= \left(\int_0^x g(t) dt - \int_0^x e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \right) + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt - \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \end{aligned}$$

car l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt$ converge. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x g(t) dt - \int_0^x e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \right) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt$ existe et vaut $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge et $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$.

Q.37 ▷ Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_0^x f(t) dt = xg(x) + \int_0^x g(t) dt$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt.$$

Soit $x > 0$. On considère l'intégrale $\int_0^x f(t) dt$ et on effectue une intégration par parties sur $]0, x]$ en dérivant l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ et en prenant $t \mapsto \int_0^t uf(u) du$ pour primitive de l'application $t \mapsto tf(t)$. Or pour tout $t > 0$, $\int_0^t uf(u) du = t^2g(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} tg(t) = 0$, donc

$$\int_0^x f(t) dt = xg(x) + \int_0^x g(t) dt.$$

Par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ et en utilisant **Q.28** et **Q.36**, on obtient $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt$. Par suite, d'après **Q.36** et **Q.30**,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt.$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \phi(t) = \begin{cases} \frac{t}{e^t - 1} - \sin t & \text{si } t > 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Q.38 ▷ Justifier que ϕ est continue sur $[0, +\infty[$.

L'application ϕ est continue sur $]0, +\infty[$. Montrons qu'elle est continue en 0. Comme $e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, alors $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$. Par suite, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t) = 1 = \phi(0)$. D'où ϕ est continue sur $[0, +\infty[$.

Q.39 ▷ Soit $a > 0$. Prouver que $\int_0^{+\infty} e^{-at} \phi(t) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \phi(t) dt = -\frac{1}{1+a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2}.$$

(On pourra utiliser un développement en série entière).

Soit $a > 0$. L'application $t \mapsto e^{-at} \phi(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc il suffit d'étudier la convergence au voisinage de $+\infty$.

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t - 1} = 0$, alors ϕ est bornée sur $[0, +\infty[$ et $e^{-at} \phi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc $\int_0^{+\infty} e^{-at} \phi(t) dt$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-at} \phi(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{t}{e^t - 1} dt - \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin t dt$. On a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \sin t dt = \frac{1}{1+a^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-(a+1)t} \frac{1}{1 - e^{-t}} dt.$$

Or pour tout $t > 0$, $\frac{1}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} t e^{-(a+n+1)t} dt$.

Comme $\int_0^{+\infty} t e^{-(a+n+1)t} dt = \frac{1}{(a+n+1)^2}$ et la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(a+n+1)^2}$ converge, alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(a+n)^2}.$$

Par suite, $\int_0^{+\infty} e^{-at} \phi(t) dt = -\frac{1}{1+a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2}$.

Q.40 ▷ Montrer que $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} \phi(t) dt$ existe dans $\mathbb{R}$, mais que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt$ diverge.

D'une part, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+a^2} = 1$ et la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+a)^2}$ converge normalement sur $[0, +\infty[$, donc $\lim_{a \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. D'où $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} \phi(t) dt$ existe et vaut $-1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. D'autre part, $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt$ diverge car $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ converge, mais $\int_0^{+\infty} \sin t dt$ diverge.

Partie III.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

On rappelle que l'application $\| \cdot \|_{\infty} : f \mapsto \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ est une norme sur $\mathcal{C}$.

Q.41 ▷ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in B = \{h \in \mathcal{C} ; \|h\|_{\infty} \leq \frac{1}{4}\}$.

A l'aide d'une étude de variations, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{4}$, donc $f_n \in B$.

Q.42 ▷ Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Si $x \in [0, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et si $x = 1$, alors $f_n(1) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par suite, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$.

Q.43 ▷ Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet aucune sous-suite convergente dans $(\mathcal{C}, \| \cdot \|_{\infty})$ et en déduire que B n'est pas un compact de $(\mathcal{C}, \| \cdot \|_{\infty})$.

Supposons qu'il existe $\theta : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante telle que $(f_{\theta(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers f dans $(\mathcal{C}, \| \cdot \|_{\infty})$. Alors $(f_{\theta(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f sur $[0, 1]$. Par unicité de la limite, on aura $f \equiv 0$ sur $[0, 1]$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_{\theta(n)}\|_{\infty} = \frac{1}{4}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_{\theta(n)}\|_{\infty} = \frac{1}{4} \neq 0$, ce qui donne une contradiction. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de B n'admettant aucune sous-suite convergente, alors B n'est pas un compact de $(\mathcal{C}, \| \cdot \|_{\infty})$.

Q.44 ▷ Soient $f \in \mathcal{C}$ et $x > 0$. Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx} f(e^{-nx})$ converge.

L'application f étant continue sur $[0, 1]$, alors elle est bornée sur $[0, 1]$. Donc il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq C$. Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|e^{-nx} f(e^{-nx})| \leq C e^{-nx}$. Comme la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx} f(e^{-nx})$ converge absolument, donc elle converge.

On note $L(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} f(e^{-nx})$.

Q.45 ▷ Montrer que l'ensemble $E = \{f \in \mathcal{C}, \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}, \| \cdot \|_{\infty})$.

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$. Remarquons que l'application nulle appartient à E . D'autre part, si $f, g \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(\alpha f + g)(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(g)(x) \in \mathbb{R}$. Donc $\alpha f + g \in E$. Montrons que E est un fermé de $(\mathcal{C}, \| \cdot \|_{\infty})$. Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers $f \in \mathcal{C}$ pour $\| \cdot \|_{\infty}$. Montrons que $f \in E$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $g_k(x) = xL(f_k)(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_k(x) = l_k \in \mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, on pose $g(x) = xL(f)(x)$. Montrons que la suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $]0, 1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, 1]$,

$$|g_k(x) - g(x)| = \left| x \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} (f_k(e^{-nx}) - f(e^{-nx})) \right| \leq \|f_k - f\|_{\infty} \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

Comme l'application $x \mapsto \frac{x}{1 - e^{-x}}$ est continue sur $]0, 1]$ et admet une limite finie (égale à 1) en 0, alors cette application est bornée sur $]0, 1]$. Soit $c_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]0, 1]$, $0 \leq \frac{x}{1 - e^{-x}} \leq c_1$.

D'où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in]0,1]} |g_k(x) - g(x)| \leq c_1 \|f_k - f\|_\infty$. Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{x \in]0,1]} |g_k(x) - g(x)| = 0$. D'après le théorème de la double limite, l'application g admet une limite finie lorsque x tend vers 0^+ , c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, $f \in E$. D'où E est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$.

Pour $f \in E$, on pose

$$T(f) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)(x).$$

Q.46 ▷ Prouver que l'application $T : f \in E \mapsto T(f)$ est une forme linéaire continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Soient $f, g \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$T(\alpha f + g) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(\alpha f + g)(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(g)(x) = \alpha T(f) + T(g)$. D'où T est une forme linéaire sur E .

Montrons que T est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $f \in E$. Pour tout $x > 0$,

$$|xL(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \left| x \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \right| = \|f\|_\infty \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

D'où $|T(f)| \leq \|f\|_\infty$. Par suite, T est continue sur E .

Q.47 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $m_k : t \in [0, 1] \mapsto t^k$ appartient à E et que

$$T(m_k) = \int_0^1 m_k(t) dt.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$, $xL(m_k)(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n(1+k)x} = \frac{x}{1 - e^{-(1+k)x}}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(m_k)(x) = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 m_k(t) dt \in \mathbb{R}$. Par suite, $m_k \in E$ et $T(m_k) = \int_0^1 m_k(t) dt$.

Q.48 ▷ En déduire que $E = \mathcal{C}$ et que pour tout $f \in \mathcal{C}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} f(e^{-nx}) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_k \in E$ et E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, alors pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, l'application polynomiale (associée à P) $\tilde{P} \in E$. Soit $f \in \mathcal{C}$. Alors f est une limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Or E est fermé, donc $f \in E$. D'où $E = \mathcal{C}$.

D'autre part, T étant continue sur E , donc pour tout $f \in \mathcal{C}$,

$$T(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$$

car $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f . D'où

$$T(f) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} f(e^{-nx}) = \int_0^1 f(t) dt.$$

★ Fin de l'épreuve ★